Hypoténuse productions

présente

Trajectoires et Temps d'Arrêt

Réflexions d'historiens autour de l'exposition Borel

Un film de Jean-Manuel Fernandez et Laurent Mazliak

https://images.math.cnrs.fr/trajectoires-et-temps-d-arret.html

Some elements on Borel and game theory

Laurent Mazliak
LPSM, Sorbonne-Université,
Paris, France
laurent.mazliak@sorbonne-universite.fr

Emile Borel.
La théorie des jeux et les équations intégrales à noyau symétrique, CRAS, 173, 1921. 1304-1308

verneur Jullien, mais j'ai trouvé surtout un concours, aussi compétent que dévoué, en la personne de M. Dandouau, ancien secrétaire de l'Académie malgache, qui a bien voulu revoir avec moi mon texte aux points de vue linguistique et géographique. L'orthographe de chaque nom a été discutée, puis sa position géographique repérée, dans la mesure du possible, sur les diverses cartes de la Colonie. Un index géographique a été établi, dans quoi le lecteur trouvera (Tome II) plusieurs milliers de noms ou d'expressions géographiques, il constitue un véritable dictionnaire de géographie géologique et minéralogique malgache. Par toutes ces précautions, j'espère avoir réduit au minimum les erreurs qui, d'ailleurs, ne sauraient être évitées complètement.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*. Note de M. **Émile Borel**.

Considérons un jeu où le gain dépend à la fois du hasard et de l'habileté des joueurs et bornons-nous au cas de deux joueurs A et B et d'un jeu symétrique, de sorte que si A et B adoptent la même méthode de jeu, leurs chances sont égales. On peut se proposer de rechercher s'il est possible de déterminer une méthode de jeu meilleure que les autres, c'est-à-dire qui donne au joueur qui l'adopte une supériorité sur tout joueur qui ne l'adopte pas. Précisons d'abord ce que nous devons entendre par une méthode de jeu : c'est un code qui, dans toutes les circonstances possibles (supposées en nombre fini), fixe exactement ce que le joueur doit faire. Dans la plupart des jeux usuels, le nombre des méthodes possibles est extrêmement grand, mais cependant toujours fini. Si le joueur A adopte la méthode C_i et B la méthode C_k, le calcul des probabilités permet de calculer la probabilité de gain de A, que nous appellerons a et celle de B qui sera $b = 1 - a$; nous poserons

$$(1) \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} + \alpha_{ik}, \\ b = \frac{1}{2} + \alpha_{ki}; \end{cases}$$

les nombres α_{ik} et α_{ki}, compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, satisfont à la relation

$$(2) \qquad \alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0.$$

La symétrie du jeu s'exprime par les relations

$$(3) \qquad \alpha_{ii} = 0.$$

jusque vers le milieu de 1923. Même il s'était remis
alors frappé, de sorte qu'il n'a connu aucune déch
Marseille un honorable foyer, que le malheur av
mais il y a laissé une famille nombreuse et respecté
en votre nom, toutes nos condoléances.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M.
dant de l'Académie pour la section d'Astronomie;
à l'Université de Gand, membre de l'Académie
M. **Wulf**, professeur à l'Université d'Utrecht, qui

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les jeux où*
avec l'habileté des joueurs. Note (¹) de M.

Dans une Note sur la théorie du jeu et les équati
symétrique gauche (²), j'ai abordé l'étude systén
hasard se combine avec l'habileté des joueurs et j'a
cultés spéciales on pouvait se heurter à propos de t
cette étude dans un travail que j'ai communiqué au
de l'*Association française pour l'avancement des Sc*
avec quelques modifications, dans la nouvelle éditio
théorie des probabilités. Je voudrais aujourd'hui in
question me paraît appeler des recherches nouvelles
tion du problème suivant dont voici l'énoncé purem

« Étant donné un entier n, déterminer $\frac{n(n-1)}{2}$ cons
$k = 1, 2, \ldots, i-1$) telles que, si l'on pose

$$(1) \qquad f(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik}(x_i y_k - x_k y$$

il *ne soit pas* possible de déterminer des valeurs positives ou nulles, mais non *toutes* nulles, des variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant la propriété suivante : les α et les y étant ainsi choisis, la fonction $f(x, y)$ ne peut pas prendre de valeurs négatives pour des valeurs positives des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

(¹) Séance du 26 décembre 1923.
(²) *Comptes rendus*, 19 décembre 1921.

tions en diverses langues. Ses études sur l'emploi des câbles coniques pour les puits à grande profondeur ont rendu des services signalés; ses travaux si estimés sur le grisou ont été le point de départ de cette grande Commission du grisou que les recherches de nos confrères Mallard, Le Chatelier et leurs successeurs ont rendu fameuse.

Les formules analytiques de Haton, relatives à la répartition de la richesse dans les filons métallifères, ses exposés sur les progrès de l'exploitation et leurs méthodes dont il dégageait les idées fondamentales, son rare talent d'exposition, ont assuré le succès de son œuvre la plus répandue dans le public et la plus importante peut-être : son cours d'exploitation des mines. La clarté de ses exposés est restée proverbiale parmi les vingt-
neuf générations d'élèves qui
distingués à nos compagnies m

C'est après cette vie si pleine
ses puissantes facultés intellec
décida à prendre quelque repos
ciel plus doux qu'il vient de s'é

Depuis des années déjà il ava
d'entre nous ne l'ont même pa
attachée, et l'an passé encore
Science, et son regret que ses
mêlée pour elle, et pour sa foi,

Je lève la séance en signe de

ALGÈBRE ET CALCUL DES PRO
linéaires à déterminant symé
Note (¹) de M. **Émile Borel**

Dans deux Notes récentes
pose à propos des systèmes d'é
gauche d'ordre impair auxque
jeu. Diverses communications q
ment une intéressante lettre
que j'avais eu tort de ne pas

(¹) Séance du 4 janvier 1927.

TRAITÉ du CALCUL des PROBABILITÉS et de ses APPLICATIONS
Par Émile BOREL
AVEC LA COLLABORATION DE
C.-V.-L. CHARLIER, R. DELTHEIL, P. DUBREIL, M. FRÉCHET, H. GALBRUN, J. HAAG, R. LAGRANGE, F. PERRIN, R. RISSER, C.-E. TRAYNARD, J. VILLE.

TOME IV
APPLICATIONS DIVERSES ET CONCLUSION

FASCICULE II

APPLICATIONS AUX JEUX DE HASARD

COURS PROFESSÉ A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS
PAR
Émile BOREL

RÉDIGÉ PAR
Jean VILLE
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins
1938

Content of Borel's note in 1921 ?

Classical situations: games subject to the calculation of probabilities, like the coin toss, are based on pure chance.
But: more interesting game situations are at a higher level of complexity. Consideration of the actions of players whose skill combines with chance (such as a card deal) to achieve victory.

One must be interested in the actions chosen by the players at each moment of the game.

Therefore, in real complex games, players must spread their selection of actions over the different possibilities.

Two players A and B, each of whom can choose their actions from a finite set of possibilities C_1, C_2, ... , C_n. Matrix $n \times n$ of the game:

$$\begin{pmatrix} 0.5+\alpha_{11} & 0.5+\alpha_{12} & \dots & 0.5+\alpha_{1n} \\ 0.5+\alpha_{21} & 0.5+\alpha_{22} & \dots & 0.5+\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0.5+\alpha_{n1} & 0.5+\alpha_{n2} & \dots & 0.5+\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

α_{ij} is a number between -0.5 et 0.5.

$0.5 + \alpha_{ij}$ indicates the probability that A wins knowing that A has chosen the strategy C_i and B strategy C_j .

Borel asks : $\alpha_{ii} = 0$ (same chosen strategy => « neutralization ») and $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ (symmetric situation).

The strategy of the players is represented by a probability distribution over the different actions. It is assumed that player A chooses strategy C_i with probability p_i and that player B chooses C_j with probability q_j .

Under these conditions, the probability of A winning the game is given by 0.5 + α where

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} p_i q_k$$

The game is fair or balanced if $\alpha = 0$

But he also states, without giving further details, that if $n \geq 5$, this equilibrium situation holds only for particular values of the α_{ij}.

Why Borel's doubts from the beginning that the game can be balanced?

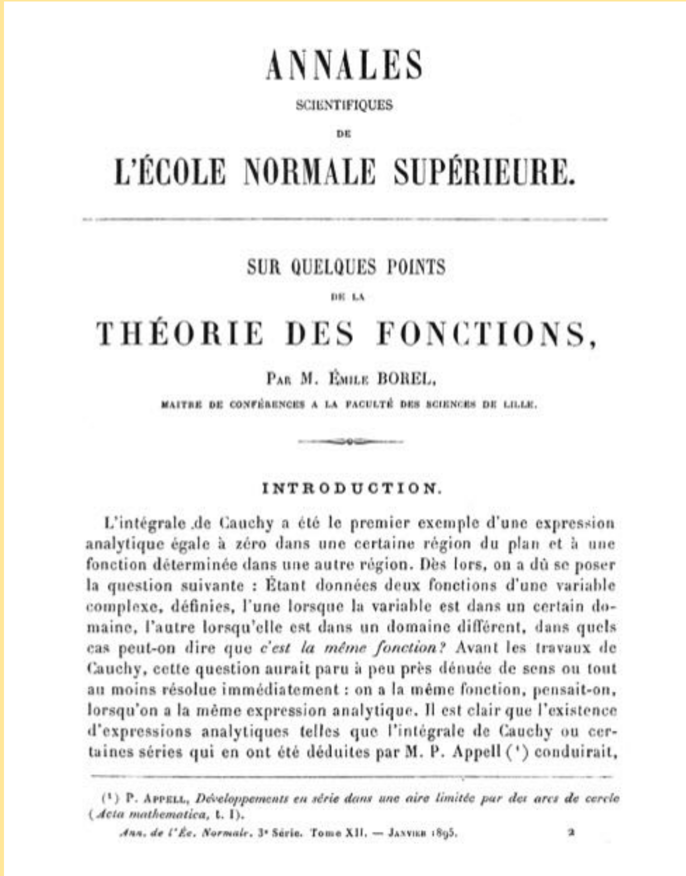
Borel did not intend to deal with an abstract theory of games and always kept real games in mind. In a real game, one must take into account an interaction between the two players; the probability distribution of the different actions quantifies the skill of the players in guessing the strategy of their opponent.

What do we mean by a player's "skill"? It is his ability to make the most of the elements provided by chance. A more detailed study (. . .) will allow us to highlight two distinct factors in this skill: on the one hand, an exact knowledge of all the possible combinations presented by the game, and of their respective probabilities; on the other hand, the player's ability to deceive his opponent about his intentions or about certain facts, such as the value of his own game. (1938)

Borel: a proponent of a subjective interpretation of probability, so that the probabilities used to describe a player's strategy reflect his understanding (or assumption) of what the other player is doing.

In a real game, the number of available strategies is very high, which is an obstacle to the possibility of a truly fair game: perfect symmetry between two players is simply impossible because one player is necessarily more skilled than the other.

Emile Borel
(1871-1956)



ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR QUELQUES POINTS
DE LA
THÉORIE DES FONCTIONS,

PAR M. ÉMILE BOREL,
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

INTRODUCTION.

L'intégrale de Cauchy a été le premier exemple d'une expression analytique égale à zéro dans une certaine région du plan et à une fonction déterminée dans une autre région. Dès lors, on a dû se poser la question suivante : Étant données deux fonctions d'une variable complexe, définies, l'une lorsque la variable est dans un certain domaine, l'autre lorsqu'elle est dans un domaine différent, dans quels cas peut-on dire que *c'est la même fonction?* Avant les travaux de Cauchy, cette question aurait paru à peu près dénuée de sens ou tout au moins résolue immédiatement : on a la même fonction, pensait-on, lorsqu'on a la même expression analytique. Il est clair que l'existence d'expressions analytiques telles que l'intégrale de Cauchy ou certaines séries qui en ont été déduites par M. P. Appell (1) conduirait,

(1) P. APPELL, *Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle* (*Acta mathematica*, t. I).

Ann. de l'Éc. Normale. 3e Série. Tome XII. — JANVIER 1895. 2

Borel's PhD thesis (1894) : *On some points of the theory of functions*.

Revisiting the Sources of Borel's Interest in Probability: Continued Fractions, Social Involvement, Volterra's Prolusione

ANTONIN DURAND* and LAURENT MAZLIAK†

Abstract. In this paper, we revisit the origins of Emile Borel's developing interest in probability around 1905. This resulted from new findings in his research on continued fraction, but it also cannot be separated from the discovery of new applications for the mathematics of randomness (such as biology or economics) and of their importance as a life-changing tool for the citizen. In particular, we underline the role of a paper published by Vito Volterra in Borel's *Revue du Mois*.

Keywords. Borel, probability, *Revue du Mois*, Volterra.

1. *Introduction*[1]

When Emile Borel met Vito Volterra, at the International Congress of Mathematicians in Zurich in 1897, he was 11 years younger than Volterra and already considered a brilliant young mathematician. Borel had risen swiftly to the post of associate professor at the university of Lille, although at this point his international reputation was still overshadowed by elder mathematicians like Poincaré and Hermite who dominated the French school at that time. Volterra, despite being older and already well regarded by his peers, had not yet reached the watershed after which he devoted an increasing amount of time to the building of the Italian scientific institutions. The subsequent friendship of the two men, which lasted until the death of Volterra in 1940, was the basis for a large series of letters, most of which have been conserved at the Academia dei Lincei in Rome and at the Académie des Sciences in Paris.

The dialogue between these two personalities was often institutional in nature (organisation of conferences, wartime cooperation). Mathematics was not always at the center of their correspondence or, more precisely, their particular interests never coincided.

Letters that testify to their mutual simultaneous research far from dominate in number, and it is often difficult to deduce any reciprocity in the issues motivating their efforts.

*Ecole Pratique des Hautes Etudes, Paris, France. E-mail: Antonin.Durand@ephe.sorbonne.fr
†LPMA, Université Pierre et Marie Curie, Paris. E-mail: laurent.mazliak@upmc.fr

CENTAURUS 2011: VOL. 53: PP. 306–332; doi:10.1111/j.1600-0498.2011.00238.x

Durand, A. and L. Mazliak (2011). Revisiting the sources of Borel's interest in probability : continued fractions, social involvement, Volterra's Prolusione. *Centaurus* 53(4), 306–332.

Mazliak, L. and M. Sage (2024). Altered States : Borel and the Probabilistic Approach to Reality. In Paola Cantù and Georg Schiemer. Logic, Epistemology, and Scientific Theories - From Peano to the Vienna Circle. Springer, 2024.

Chapter 3
Altered States: Borel and the Probabilistic Approach to Reality

Laurent Mazliak and Marc Sage

Abstract We examine in this article the singular way in which Émile Borel, from his studies on the structure of real numbers and a certain rejection of Cantor's abstract vision, found in the calculus of probabilities an adequate tool to formulate a new approach to problems. At the same time, he became aware of its usefulness for the approach to the phenomena of physics and society. He developed a singular approach to the problem of interpretation of the concept of probability, merging subjectivist and objectivist aspects under an idiosyncratic formulation of the so-called Cournot principle.

Keywords Émile Borel · Georg Cantor · Probability · Continuous fractions · Set theory

3.1 Introduction

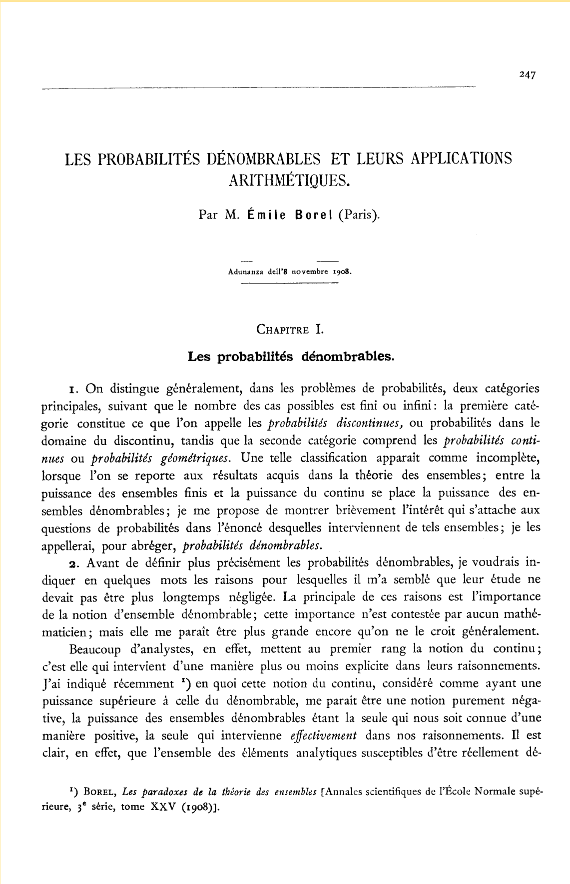
The probabilistic turn of Émile Borel which is the focus of this paper is one of the most singular developments that can be observed in a mathematician at the beginning of the twentieth century. After laying the foundations for a profound transformation of the theory of functions, Borel had become a beacon of mathematical analysis in France. Nothing seemed then to predispose him for a major turn and for devoting significant forces to studying, perfecting and disseminating the calculus of

The present chapter is a translation, and a slight revision, of the original French article: Laurent Mazliak et Marc Sage. *Au-delà des réels. Emile Borel et l'approche probabiliste de la réalité*. Revue d'Histoire des Sciences, 67-2, 331–357, 2014. We thank the *Revue d'Histoire des Sciences* and the publisher *Dunod* for having generously allowed the present translation and publication.

L. Mazliak (✉) · M. Sage
Sorbonne Université LPSM, Paris Cedex 05, France
e-mail: laurent.mazliak@upmc.fr; marc.sage@normalesup.org

P. Cantù, G. Schiemer (eds.), *Logic, Epistemology, and Scientific Theories - From Peano to the Vienna Circle*, Vienna Circle Institute Yearbook 29,
https://doi.org/10.1007/978-3-031-42190-7_3

1) the probabilistic approach allows to bypass a Cantor-like approach based only on internal logic that Borel, after having been a resolute Cantorian, now treats with defiance.



247

LES PROBABILITÉS DÉNOMBRABLES ET LEURS APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES.

Par M. **Émile Borel** (Paris).

Adunanza dell'8 novembre 1908.

CHAPITRE I.

Les probabilités dénombrables.

1. On distingue généralement, dans les problèmes de probabilités, deux catégories principales, suivant que le nombre des cas possibles est fini ou infini: la première catégorie constitue ce que l'on appelle les *probabilités discontinues,* ou probabilités dans le domaine du discontinu, tandis que la seconde catégorie comprend les *probabilités continues* ou *probabilités géométriques*. Une telle classification apparaît comme incomplète, lorsque l'on se reporte aux résultats acquis dans la théorie des ensembles; entre la puissance des ensembles finis et la puissance du continu se place la puissance des ensembles dénombrables; je me propose de montrer brièvement l'intérêt qui s'attache aux questions de probabilités dans l'énoncé desquelles interviennent de tels ensembles; je les appellerai, pour abréger, *probabilités dénombrables*.

2. Avant de définir plus précisément les probabilités dénombrables, je voudrais indiquer en quelques mots les raisons pour lesquelles il m'a semblé que leur étude ne devait pas être plus longtemps négligée. La principale de ces raisons est l'importance de la notion d'ensemble dénombrable; cette importance n'est contestée par aucun mathématicien; mais elle me paraît être plus grande encore qu'on ne le croit généralement.

Beaucoup d'analystes, en effet, mettent au premier rang la notion du continu; c'est elle qui intervient d'une manière plus ou moins explicite dans leurs raisonnements. J'ai indiqué récemment [1]) en quoi cette notion du continu, considéré comme ayant une puissance supérieure à celle du dénombrable, me paraît être une notion purement négative, la puissance des ensembles dénombrables étant la seule qui nous soit connue d'une manière positive, la seule qui intervienne *effectivement* dans nos raisonnements. Il est clair, en effet, que l'ensemble des éléments analytiques susceptibles d'être réellement dé-

[1]) BOREL, *Les paradoxes de la théorie des ensembles* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3[e] série, tome XXV (1908)].

Emile Borel. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 27 (1909), 247–271.

2) the probabilistic approach has become essential in modern physics and in particular in the kinetic theory of gases.

3) the probabilistic approach makes it possible to understand scientifically the question of risk which is at the heart of any reflection on social progress in modern, urban and industrial society, in accordance with the radical-socialist political line to which Borel was close.

1re Année. 10 Juillet 1906 N° 7.

La Revue du Mois

TOME II. — PREMIÈRE LIVRAISON

SOMMAIRE

PRIX DE LA LIVRAISON : 2 fr. 25

PARIS

2, BOULEVARD ARAGO, XIIIe

1906

Dépôt général de la Revue :

LIBRAIRIE H. LE SOUDIER

174-176, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

NOUVELLE COLLECTION SCIENTIFIQUE

Directeur : ÉMILE BOREL

LE HASARD

PAR

ÉMILE BOREL

Membre de l'Institut

Professeur à la Sorbonne

Directeur honoraire de l'École Normale Supérieure

NOUVELLE ÉDITION

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN

LA DÉFENSE NATIONALE et les Inventeurs

Un savant est chargé d'une direction spéciale

M. Painlevé a été nommé, tout à la fois, ministre de l'instruction publique et ministre des inventions intéressant la défense nationale. Grand maître de l'Université, il a pris la direction des services de l'enseignement au lendemain de la constitution du nouveau ministère. Il a, hier, organisé le nouveau service qui lui a été confié, et il a placé à sa tête M. Emile Borel, sous-directeur de l'Ecole normale supérieure, professeur à la Faculté des sciences.

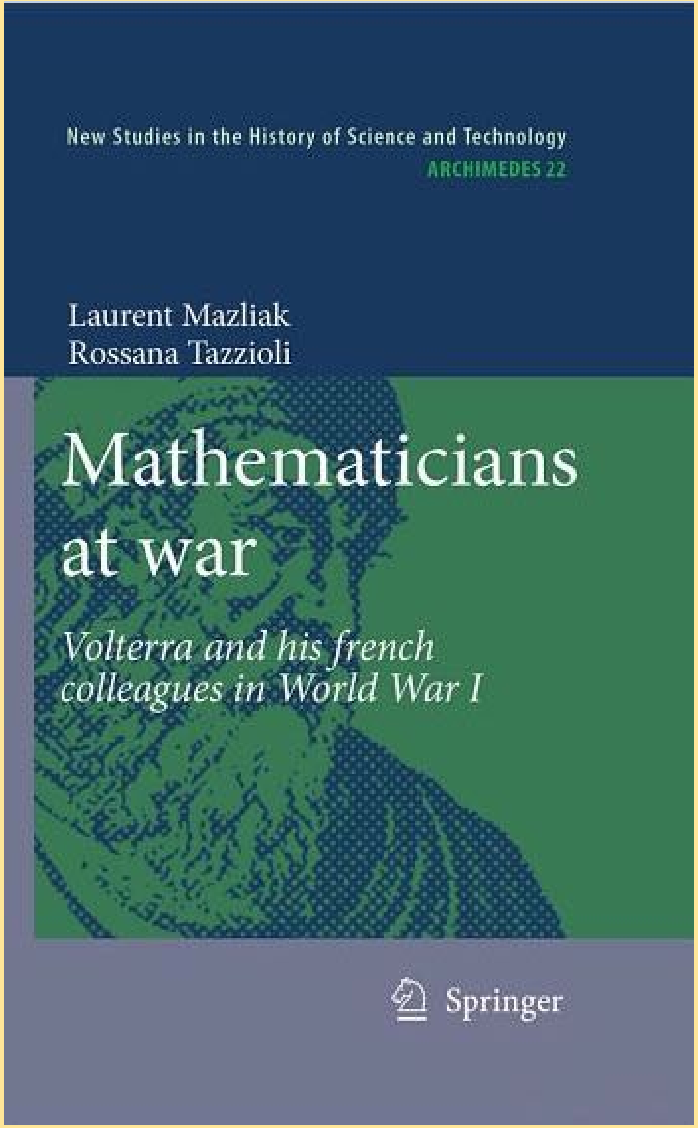
M. Emile Borel

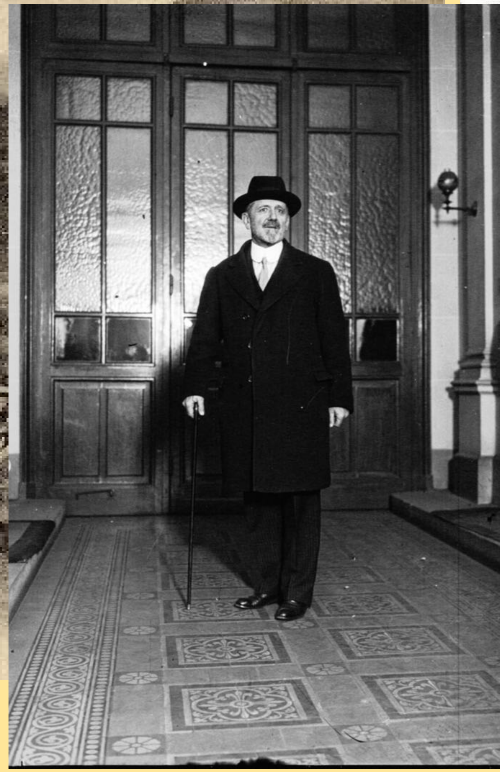
M. Borel a fait campagne comme sous-lieutenant d'artillerie territoriale. Sa brillante conduite lui a valu une citation à l'ordre du jour de l'armée.

C'est un savant de premier ordre, dont la nomination à la tête du service des inventions sera accueillie avec une satisfaction unanime. Il est connu dans le monde scientifique pour ses travaux de mathématique pure et de mécanique. Enfin, il a collaboré déjà, avec le ministre actuel de l'instruction publique, dans les études que celui-ci a faites sur l'aviation.

D'autre part, le ministre de l'instruction publique a désigné comme chef de la section administrative de la nouvelle direction M. Bigeard, contrôleur général de la marine, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

Le Journal de Paris,
15 novembre 1915





Deputy of the Aveyron district (1924-1936)
Minister of the Navy (1925)
Mayor of his native town St Affrique (1929-1952)
 [except between 1941 and 1944]

Chair of probability calculus and mathematical physics (1920)

President of the Statistical Society of Paris (1922)

Creation of the ISUP (1922)

Creation of the Institut Henri Poincaré (1928)

Launch of the *Treaty of Probability calculus and its application* (1924-1939)

North-Western European Journal of Mathematics

Le Traité du calcul des probabilités et de ses applications

Étendue et limites d'un projet borélien de grande envergure (1921-1939)

Martha-Cecilia Bustamante [1]   Matthias Cléry [2 3]   Laurent Mazliak [2]

Reçu : 22 juin 2015/Accepté : 4 novembre 2015/En ligne : 25 novembre 2015

Résumé

Cet article est consacré à l'étude détaillée du vaste projet éditorial de Borel dans les années 1920 et 1930 autour des probabilités et de leurs applications. Après avoir rappelé quelques éléments sur la biographie de Borel et décrit la mise en place du projet, nous examinons les acteurs qui y ont participé pour mieux cerner le réseau que Borel a mis en place pour arriver à ses fins. Enfin, dans une troisième partie les fascicules du *Traité* sont aussi examinés individuellement afin de dessiner le contour du domaine probabiliste tel que Borel le concevait, dont nous montrons qu'il est en fait déjà obsolète au moment où la publication s'achève.

Mots-clés : probabilités, statistiques, balistique, assurance, jeux, Émile Borel, Institut Henri Poincaré.

MSC : 01A60, 01A74, 60-03, 60A05, 62-03.

Introduction

La singulière multiplication des textes concernant le calcul des probabilités, spécialisés ou à destination d'un plus ou moins large public au début du xx^{e} siècle marque l'aboutissement d'un long processus né au cours du xix^{e} siècle qui avait hissé progressivement les mathématiques du hasard au rang d'acteurs essentiels de la science moderne. C'est avant tout les développements en physique qui avaient participé de ce mouvement, notamment avec les travaux de Maxwell et Boltzmann, principaux fondateurs de la théorie cinétique des gaz, prolongés par ceux de Gibbs,

1. Laboratoire SPHERE-Université Paris Diderot
2. LPMA-Université Pierre et Marie Curie
3. GHDSO-Université Paris-Sud

Another consequence of the same dogma is the utilitarian character of Calvinist ethics. There is no possible conflict between the individual and ethics. The man convinced of his salvation attests to it by the objective results of his actions. It's not a question of gratuitous actions to praise God abstractly, but of achieving useful and positive objectives: ”An idea exalted the Calvinist: that God, in creating the world including the social order, must have objectively conceived means of celebrating his glory; that he must have willed not the creature for its own sake, but the ordering of the created subject to his will. Therefore, liberated by the doctrine of predestination, the active energies of the elect were transformed into efforts to rationalize the world". Liberated? Yes, because the individual no longer had to seek his salvation: if he was predestined, he was saved or lost from all eternity, without being able to change anything. So he could "take care of the world here below". And this text leads us to a final effect of the doctrine of predestination: rationalization. Calvinist theology is rigorously rational. So too must man's behavior and his action in the world, for anything that escapes this rigor is ultimately a kind of idolatry of the flesh. All human relationships must be rationalized to avoid sentimentalism, and so on. But this rationalization needs to be understood: it's not rationalism, it's not the ultimate rationalization of reason. In reality, the Christian's life is rationalized in relation to a single goal: to increase the glory of God on earth. It is from this end that a vigorous rationalization takes place. Instinctive and spontaneous enjoyment must be annihilated, individual conduct put in order, and a method of action in the world established (but this, together with the idea of vocation, means method in work, in economic behavior). The methodical regulation of personal life is the surest ethical expression of belief in predestination. But this regulation involves both beings subject to our authority, and the regulation of social and economic structures.

Ellul, J. (1964). *Max Weber, l’éthique protestante et l’esprit du capitalisme*. Bulletin SEDEIS 905.)

Mercure de France, T. 275, 48e année, n° 932, 15 avril 1937, pp. 290-301. 250

Eloge du jeu

EUDOXE, mathématicien.

ARMANDE.

ARISTE, philosophe et économiste.

EUDOXE. — Je songe à écrire un petit livre fort différent de mes travaux habituels; avant de m'y risquer, je serais heureux d'avoir votre avis; il s'agit d'un *Eloge du jeu.*

ARMANDE. — Quelle idée singulière ! Je n'ignore pas, car vous me l'avez souvent répété, que le jeu a inspiré les travaux de Pascal sur les probabilités et qu'ainsi est née une science nouvelle, qui est devenue fort compliquée, et dont vous nous avez expliqué le rôle important dans la physique moderne. Ce n'est pas une raison, sous prétexte que le goût du chevalier de Méré pour les dés a servi Pascal, pour encourager au jeu nos contemporains; les uns se ruineront dans les casinos et les tripots; les autres, encore plus dangereux pour la bonne société, contribueront à tuer dans les salons le goût de la conversation au profit de l'insupportable bridge.

ARISTE. — Ne vous emballez pas, chère amie. Eudoxe sait mieux que nous combien est fatale la ruine des joueurs et n'a certainement pas le noir dessein d'inciter ses contemporains à se ruiner. Soyez certaine que son *Eloge du jeu* est un simple artifice pour attirer des lecteurs qu'un titre plus savant rebuterait. Il y répétera ce qu'ont écrit avant lui Joseph Bertrand, Henri Poincaré et bien d'autres : la ruine du joueur est non seulement certaine, mais rapide, et on peut la prédire à coup sûr. Qu'il ne se fasse cependant pas d'illusions; si, grâce à son titre, il attire quelques joueurs, ceux-ci ne profiteront pas de ses leçons, car la passion n'écoute guère la voix de la raison.

EUDOXE. — Si vous m'aviez laissé parler, vous auriez compris, j'espère, que je ne suis pas aussi déraisonnable que le pense Armande, ni aussi habile que l'insinue Ariste. Serait-il interdit de dire du bien de nos vins de France sous peine d'être soupçonné d'encourager l'ivrognerie ? Je pourrais aussi vous faire observer que le tennis ou les échecs sont des jeux fort différents du baccara et du bridge; il est plus franc d'avouer que, si j'écris un jour l'*Eloge du jeu*, je parlerai surtout des jeux de hasard, sans m'interdire cependant quelques remarques s'appliquant à tous les jeux.

N'est-il pas frappant que le goût du jeu se retrouve chez tous les peuples, dans tous les temps, sous tous les climats, à tous les âges; il est plus universel que le goût du pain. C'est un instinct profond de la nature humaine, dû sans doute au besoin qu'a l'homme de s'évader des soucis quotidiens de la vie. Le joueur se crée, pour quelques minutes ou quelques heures, un monde conventionnel et se passionne pour des événements dont l'importance est définie par un code artificiel, souvent ingénieux et subtil. Toute son activité physique ou intellectuelle tend à obtenir la victoire sur un adversaire qui, parfois, sera demain son allié. La stricte observation des règles l'habitue à la discipline et à la loyauté; l'acceptation de la défaite régulièrement subie est une excellente leçon de vie.

Certains moralistes objecteront qu'il est des distractions d'une nature plus noble : la lecture, la musique, la conversation, voire le cinéma ou la T.S.F.; ces distractions ne sont pas accessibles à tous, ni même en tout instant à ceux qui les préfèrent; elles ne procurent pas toujours l'évasion souhaitée de préoccupations obsédantes ou d'une existence trop monotone. Pour beaucoup d'êtres humains, le jeu est le sel de la vie, à condition cependant de ne pas absorber toute leur activité, comme c'est le cas pour les joueurs professionnels. Pour ceux-ci, le jeu cesse d'être un jeu pour devenir un métier, et ce métier ne m'intéresse pas plus que les autres métiers : il est en dehors de mon sujet. Pour le professionnel du tennis ou des échecs, le court devient la glèbe et l'échiquier un instrument de travail.

ARMANDE. — Je connais certains bridgeurs auxquels il faudrait imposer la semaine de quarante heures, au risque de diminuer leurs revenus; à ce propos, dans votre description lyrique des mérites du jeu, vous avez soigneusement laissé de côté cette vilaine question d'argent qui tient tant de place dans la plupart des jeux de hasard.

I think it is a great service that gambling does to men. Much of the great progress of mankind is due to the taste for risk. To give the generous gift of this progress to all their fellow men, men have risked their fortunes, their peace of mind, their health and their lives for a magnificent stake: the hope of realizing their dream.

SÉANCE DU 18 JUIN 1928. 1689

$n-1$, il en résulte que

$$\lim \int_{-\tau}^{\tau} e^{-t^s} P_n(t)\, dt = 0$$

lorsque $s \to \infty$.

La propriété (5) des polynomes $P_j(t)$ permet d'approfondir l'étude du développement (3).

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la théorie des jeux.*
Note (¹) de M. **J. v. Neumann**, présentée par M. Émile Borel.

I. Dans son Livre *Éléments du calcul des probabilités* (Hermann, Paris, 1924, 3e édition), ainsi que dans plusieurs Notes dans les *Comptes rendus*, (184, 10 janvier 1927, p. 52-55 : *Sur les systèmes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie du jeu*), M. E. Borel traite le problème suivant : « Deux joueurs, I et II, jouent un jeu, qui consiste du choix d'un nombre x exécuté par I et du choix d'un nombre y exécuté par II; le choix de x devant se faire entre les nombres 1, 2, ..., M et celui de y entre les nombres 1, 2, ..., N. Chacun est obligé de faire son choix sans connaître celui de l'autre, et si I et II ont choisi respectivement x, y, II doit verser à I la somme a_{xy} ($a_{xy} \gtreqless 0$); le déterminant

$$|a_{xy}| \quad (x = 1, 2, \ldots, M;\ y = 1, 2, \ldots, N)$$

est donc caractéristique pour le jeu, c'est la règle du jeu. Quelle est la meilleure façon de jouer pour I et pour II ? » En particulier, M. Borel admet que le jeu soit juste, c'est-à-dire que I et II y aient le même rôle; ce qui signifie évidemment $M = N$, $a_{xy} = -a_{yx}$ (c'est-à-dire que le déterminant $|a_{xy}|$ est symétrique gauche).

M'étant occupé indépendamment avec le même problème (un peu généralisé) et ayant obtenu, entre autres, un résultat qui donne une réponse affirmative à la question principale (et non résolue) que pose M. Borel, je me permets de revenir sur ce problème. La déduction détaillée de mes résultats paraîtra bientôt dans un autre Recueil : *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*.

II. Notons d'abord, que le jeu défini tout à l'heure avec l'aide d'un déterminant $|a_{xy}|$ pourrait paraître bien spécial, mais qu'on peut, en intro-

(¹) Séance du 14 mai 1928.

J.Von Neumann. Sur la théorie des jeux, *CRAS*, 14 mai 1928. *Presented by Borel.*

Value of the game : given by the minmax for one player, by the maxmin for the other.

von Neumann's theorem : Equality between the two values for any number of strategies.

The game is therefore equitable.

QUELQUES REMARQUES SUR L'APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS AUX JEUX DE HASARD

Par Emile Borel, Paris.

On sait le rôle qu'ont joué les études sur les jeux de hasard dans les origines du calcul des probabilités. Ces jeux ont donné aux mathématiciens l'occasion de traiter des problèmes relativement simples et les méthodes qui ont été ainsi créées ont permis d'aborder ultérieurement des problèmes plus compliqués.

C'est pour cette raison qu'il ne paraît pas inutile d'étudier certains problèmes concernant les jeux dans lesquels intervient à la fois le hasard et la psychologie des joueurs; l'étude de ces jeux permettra sans doute de créer des méthodes qui, pourront être utilisées avec profit dans de très nombreuses questions telles que les questions économiques dans lesquelles interviennent à la fois des circonstances fortuites et la psychologie des hommes.

[1] Vgl. W. Wunderlin, Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Unfallversicherung. Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 31, 1936.

[2] A Treatise on Probability, 1919.

[3] Wirtschaft und Recht der Versicherung 1925, Heft 1.

187

Borel "warned during the 1936 congress about the existence of von Neumann's article". *No time to study it*. Robert Leonard suggests that there was a touch of embarrassment ? *"Even if the minmax theorem was always true in theory, in the case where the number of possible actions of the players is very large, its practical interest is null considering the complexity of the necessary calculations."*

It is again important to note the essential diversity between Borel and von Neumann's approaches to the idea of game. Unlike the Hungarian mathematician, Borel had no intention to define a game *ex novo* by means of a definite set of axioms but only to modify an already known notion. The most evident reason for this statement is given by the fact that, in Borel's work, there could be no game theory without the consideration of the essentially probabilistic concept of mixed strategy ; this concept was in fact introduced by the French mathematician in (Borel 1921) and was to play a central role in all his subsequent works. In other words, according to Borel, the extension of the concept of game intrinsically corresponded to the randomization of the concept of strategy, reflecting the consideration of the intervention of the players' « habileté» (. . .) This was essentially the opposite of von Neumann's work.

Dell'Aglio, Luca. (1995).
Divergences in the history of mathematics : Borel, von Neumann and the genesis of Game Theory. *Rivista di Storia della Scienza* 2, 1–45.

Dialogue of the deaf...

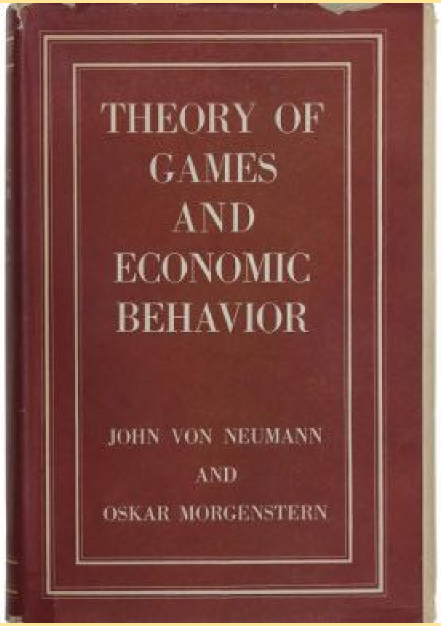
von Neumann: interaction between the two players is totally absent.

Axiomatic presentation of the game: objective presentation of a reality in which psychology is excluded.

Purely mathematical approach that allows von Neumann to formulate and obtain a general theorem.

Result impossible to use, no interest in the eyes of Borel in an applicative framework.

It is enough to reflect for a moment to realize that, even for a relatively simple game like écarté*, even if one believes that one can take into account certain remarks made by the best players which would allow to discard certain actions because they would be with certainty too unreasonable, there remains such a large number of variables that the mere task of writing the equations, let alone solving them, seems absolutely insoluble. (1938)*



Georges-Théodule
Guilbaud
(1912-2008)

Guilbaud, G.-T. (1949). La théorie des jeux. Contributions critique à la théorie de la valeur. *Economie appliquée* II, 275–319.

Ce travail n'aura qu'un seul point commun avec une véritable recension: favoriser la lecture directe de l'ouvrage. Mais je ne me limiterai pas à une revue complète des sujets traités dans ce livre ; et, inversement, je ne me limiterai pas non plus aux points de vue de nos deux auteurs, pensant bien faire en situant certains éléments de leur travail dans un contexte plus large, et en montrant une sorte de continuité (dialectique, si l'on veut parler ainsi, mais non illusoire) entre le nouvel homo economicus *et l'ancien.*

EMILE BOREL, INITIATOR OF THE THEORY OF PSYCHOLOGICAL GAMES AND ITS APPLICATION

BY MAURICE FRÉCHET

INTRODUCTION

IT WAS only relatively recently that I began to occupy myself with the theory of probability and its applications, which explains why the notes that Emile Borel [**1–7**] published between 1921 and 1927 on the theory of psychological games escaped my attention. It was chance to begin with, and then later Mr. Guilbaud brought them to my knowledge; because, in the extensive literature devoted to this theory and its applications in recent years, references to earlier work do not lead back, in general, further than to the important paper published in 1928 by Professor von Neumann. But, in reading these notes of Borel's I discovered that in this domain, *as in so many others*, Borel had been an *initiator*.[1]

The notes of Borel are of course written in French. Since the majority of papers and other publications that have appeared later on the same subject have been written in English, it seemed to me that a service would be rendered to the authors of these publications and to their readers by making them acquainted with the notes of Borel in the form of a translation into English.

There will be found below the translations of (1) Three notes of Borel,[2] and (2) A commentary in which I have tried to make it clear that the ideas adopted in current expositions of the theory of psychological games and its applications are already to be found in the notes of Borel.[3]

[1] It seems to me interesting to reproduce here a definition of the word initiator due to E. Legouvé, a definition which on being easily transposed from the domain of the literary and the esthetic to the domain of science seems to apply particularly well here. "Nos goûts, pour se produire, ont souvent besoin d'initiateurs. Je nomme initiateurs ces êtres privilégies, ces creatures magnétiques qui font vibrer en nous des cordes jusque-là muettes, ces éveilleurs d'âmes." This may be translated thus: "Our tastes, in order to manifest themselves, often need initiators. I call initiators those privileged beings, those magnetic creatures who make vibrate in us cords until then mute, those wakers of souls."

It remains no less true that it is to von Neumann and to Morgenstern that we owe a theory, much more complete, much better developed in all of its details, than that which was sketched by Borel.

[2] It did not seem worthwhile to translate three other notes (of which one is an *erratum*) published by Borel, like the others, between 1921 and 1927, for these are sufficiently well abstracted in the sixth note. References to all six notes are given in the bibliography at the end of the Notes and related commentary.

[3] C'est grâce a l'intelligence et au dévouement du Dr. Leonard J. Savage que

Maurice Fréchet. (1953). **Emile Borel, initiator of the theory of psychological games and its application**. *Econometrica*, 1953.

Important as the contribution of von Neumann and Morgenstern is, we must however consider it as falling within the progressive mathematical evolution of the theory. Their work is neither a beginning nor an end. We must not, indeed, adopt the disdainful attitude of these two authors for the work of the great initiators of mathematical economics- an attitude in which an exception is made in favor of the Austrian school, but an exception of which one senses a sentimental origin. The objections made to the work of their predecessors are of the same nature as those that can be presented against any theory. No theory takes everything into account; there will always be a more complete one; but the early one will retain its value as a less refined approximation. That, indeed, is what will happen to the work of von Neumann and Morgenstern itself; it will one day be obsolete, but it will certainly remain in the history of economic science (associated with the pioneering notes of Borel) as having contributed with clear results and opened new horizons . (Fréchet, 1953)

COMMUNICATION ON THE BOREL NOTES

By J. von Neumann

I think that it is, as a matter of principle, undesirable for an author to enter into a literary controversy arguing "pro domo sua," since his evaluation of any work to which he has contributed is necessarily subjective. In the present case I hope that my bias is somewhat compensated by my feelings of friendship and respect towards Professor M. Fréchet. I find myself in essential disagreement with his evaluation of the evolution of the theory of games. Because of the great importance that I attach to his views, I would like to put my own, differing views, insofar as they are of a mathematical character, before the readers of Econometrica. These can be summarised briefly as follows:

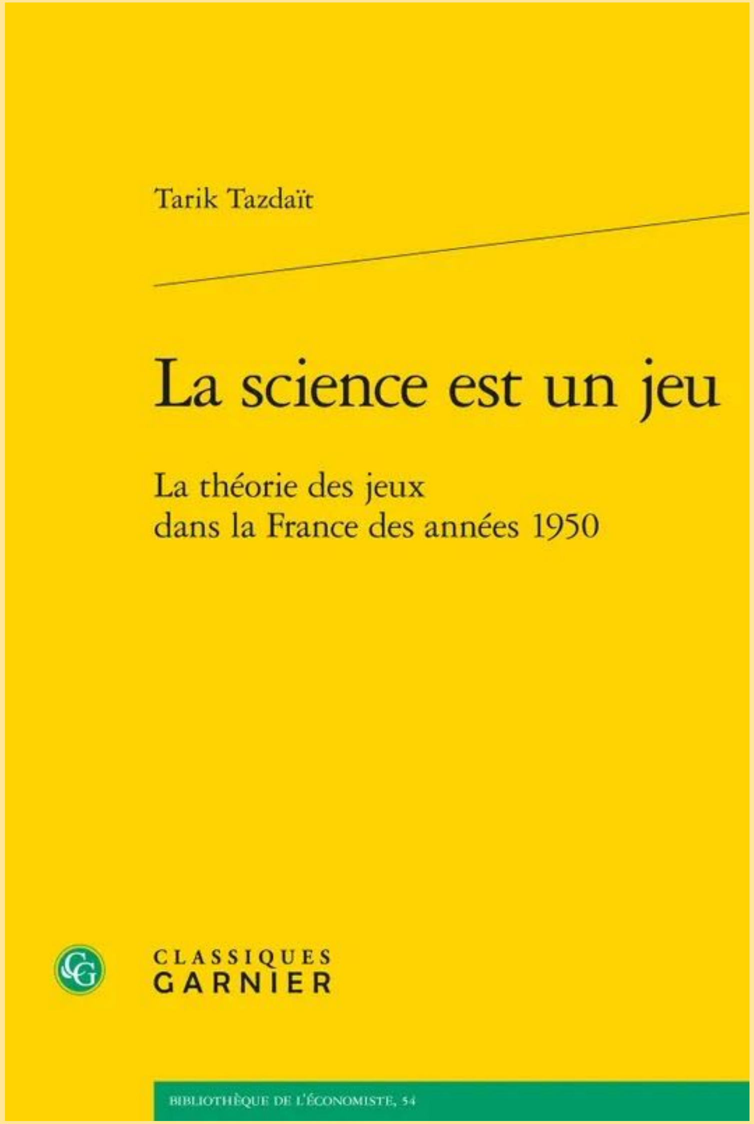
(1) E. Borel was the first author to evolve the concept of a strategy, pure as well as mixed, although he did not go beyond the case of the symmetric two-person game.

(2) The relevance of this concept in his hands was essentially reduced by his failure to prove the decisive "minimax theorem," or even to surmise its correctness. As far as I can see, there could be no theory of games on these bases without that theorem. By surmising, as he did, the incorrectness of that theorem, Borel actually surmised the impossibility of the theory as we now know it.

(3) In view of this, Borel did hardly "initiate" the theory. I developed my ideas on the subject before I read his papers, whose negative conclusions on the decisive point (the "minimax theorem," which alone makes the concepts in question unambiguously useful) would have been primarily discouraging. I am somewhat surprised that Professor Fréchet views the mere desire to mathematize strategic concepts and the straight

It is certainly is useful to put forth the arguments contrary to the thesis I have sustained above. I thank Professor von Neumann, to whom I communicated my thesis, for the exposition of those arguments he has given immediately above. Relying above all on examination of Borel's notes, the reader will judge. I thank him also for contributing facts that add materially to my commentary, in particular the important fact that he had developed his ideas on the subject of the theory of games before having read the notes of Borel.

M. Fréchet



Conclusions... in fishtail...

1) Borel clearly perceived the importance of taking into account a complexification of the model of play based solely on chance, which was generally the only one considered in probabilistic studies

2) it seems somewhat exaggerated to attribute to Borel the idea of the minmax that von Neumann succeeded in identifying, but he did consider mixed strategies and raised the question of equitable play

3) It is not excluded that the reading of Borel's notes motivated von Neumann in his formal research.

4) The attitudes of Borel and von Neumann reveal how complementary their approaches to the role and practice of applied mathematics were.

Thank you for your attention!