



**AMAP**

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Mesures de biodiversité et de concentration spatiale par l'entropie

Eric Marcon

17 Mai 2024



**AMAP**

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Motivation



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Mesures classiques de biodiversité

Inventaire d'arbres de forêt tropicale :

- $S$  espèces
- La probabilité qu'un arbre soit de l'espèce  $s$  est  $p_s$ .

Jusqu'à Rényi :

- Richesse spécifique :  $S$
- "indice de Shannon" :  $-\sum_s p_s \ln(p_s)$
- "indice de Simpson" :  $\sum_s p_s(1 - p_s)$



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

## Diversité $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$

Plusieurs niveaux d'observation hiérarchisés ([Whittaker, 1960](#)).

- Communautés locales : diversité  $\alpha$  = nombre moyen d'espèces par communauté
- Ensemble des communautés : diversité  $\gamma$  = nombre total d'espèces
- Divergence entre les communautés : diversité  $\beta$  = au choix
  - $S_\gamma - S_\alpha$  : nombre d'espèces supplémentaires
  - $S_\gamma/S_\alpha$  : rapport entre les nombres d'espèces



# Objectifs

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Unifier les mesures de diversité dans le cadre de l'entropie.

Introduire les nombres de Hill.

Expliciter la diversité  $\beta$ , décomposer la diversité  $\gamma$  en  $\alpha$  et  $\beta$ .

Appliquer cette approche à l'économie géographique :

- Spécialisation : notion opposée à la diversité
- Concentration géographique : opposée à la diversité des communautés occupées par une espèce
- Introduire la diversité jointe et la décomposer.



# Notations

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Données sous formes de table de contingence :

- $S$  Espèces en ligne,  $I$  communautés en colonne,  $n$  individus
- $n_{s,i}$  individus de l'espèce  $s$  dans la communauté  $i$
- $p_{s|i} = n_{s,i}/n_s$  : probabilité de l'espèce  $s$  dans la communauté  $i$ ,  $\sum_s p_{s|i} = 1$
- $w_i$  : poids arbitraire de la communauté  $i$
- $p_s = \sum_i w_i p_{s|i}$
- Cas particulier (sans intérêt pour la biodiversité, très utile ailleurs) :  $w_i = n_i/n$



## Exemple de données

Mesures de biodiversité et de concentration spatiale par l'entropie

Eric Marcon

### Motivation

Entropie

Divergence

Diversité jointe

Conclusion

References

Données Eurostat publiques sur les effectifs salariés des secteurs économiques des pays européens.

19 industries, 25 pays.

	AT	BE	BG	CZ	DE	DK	EE
C10	71924	85083	82510	101575	591468	54896	13827
C11	9319	9814	13298	15301	71327	4523	1516
C13	8665	17329	12914	25983	73448	3951	4452
C14	6212	3495	99974	25717	35275	1611	6052
C16	32762	11271	17263	54290	92412	9630	17191
C17	17078	11044	10353	20102	150984	6027	1430

- C10 : Manufacture de produits alimentaires, etc.
- AT : Autriche, etc.

Cas particulier où le poids de chaque pays est son effectif total.



**AMAP**

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

**Entropie**

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Entropie





AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Historique 1

L'entropie de [Rényi \(1961\)](#) a du succès en écologie dans les années 1960...

... Mais [Hurlbert \(1971\)](#) publie *The Nonconcept of Species Diversity: A Critique and Alternative Parameters* :

- l'entropie est peu intuitive,
- elle ne garantit pas de relation d'ordre

[Hill \(1973\)](#) introduit les nombres effectifs (devenus Nombres de Hill) :

- nombres d'espèces équiprobables ayant la même entropie que les données (concept de [Wright, 1931](#))



## Historique 2

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

L'entropie de Rényi est oubliée progressivement, on revient aux "indices" jusqu'à [Jost \(2006\)](#) qui publie *Entropy and Diversity* :

- les "indices" sont des entropies HCDT ([Tsallis, 1988](#))
- la diversité au sens strict est un nombre de Hill



# Formalisation

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

L'entropie HCDT d'ordre  $q$  est

$${}^q H(\mathbf{p}_s) = \frac{1}{q-1} \left( 1 - \sum_{s=1}^S p_s^q \right),$$

où  $\mathbf{p}_s = \{p_1, p_2, \dots, p_s, \dots, p_S\}$

Elle généralise les mesures traditionnelles :

- ${}^0 H$  est le nombre d'espèces moins 1
- ${}^1 H$  est l'indice de Shannon
- ${}^2 H$  est l'indice de Simpson



# Nouvelle formalisation

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

L'entropie est l'espérance de l'information apportée par une observation ([Maasoumi, 1993](#))

L'information  $I(p_s)$  est strictement décroissante et  $I(1) = 0$ .

L'information de Shannon est  $\ln(1/p_s)$

L'inverse de la probabilité  $p_s$  est appelé *rareté* de l'espèce  $s$

⇒ L'information de Shannon est le log de la rareté.



AMAP

Mesure de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

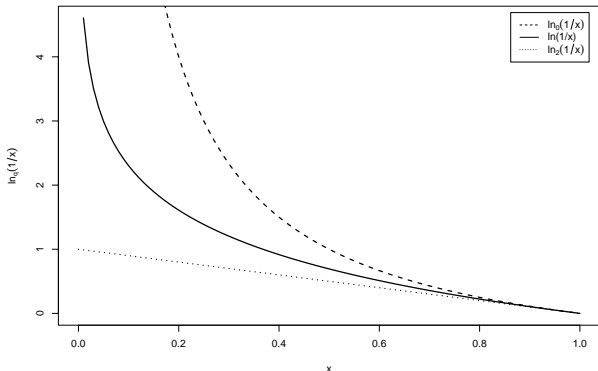
Diversité  
jointe

Conclusion

References

## Généralisation

Logarithme déformé d'ordre  $q$  (Tsallis, 1994) :  $\ln_q x = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}$



Alors  ${}^q H(\mathbf{p}) = \sum_s p_s \ln_q(1/p_s)$



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Nombres de Hill

Le nombres de Hill d'ordre  $q$  est l'exponentielle déformée de l'entropie ([Marcon et al., 2014](#)) :

$$e_q^x = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}.$$

$${}^q D(\mathbf{p}_s) = e_q^{H(\mathbf{p}_s)}$$

C'est un nombre effectif d'espèces / secteurs économiques.



AMAP

# Profils de Diversité

Mesures de biodiversité et de concentration spatiale par l'entropie

Eric Marcon

Motivation

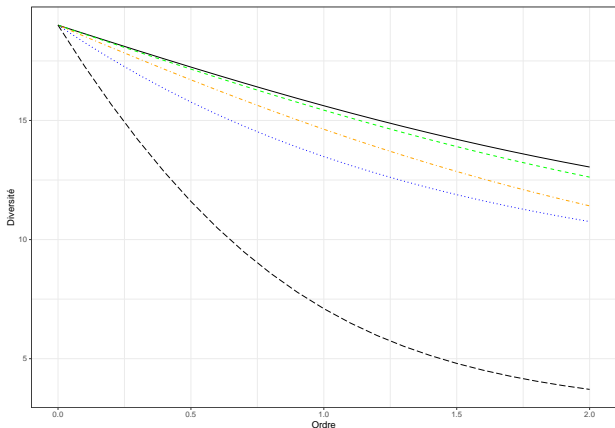
Entropie

Divergence

Diversité jointe

Conclusion

References



Profils de diversité de l'Europe (noir), de l'Italie (vert), de la France (orange), de l'Allemagne (bleu) et de l'Islande (pointillés noirs).



# Spécialisation

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Notion opposée à celle de diversité, utilisée en économie.

- Indice de [Theil \(1967\)](#) :  $\ln S - {}^1H$
- Indice d'Herfindahl ([Hirschman, 1964](#)) :  $\sum_s p_s^2 = 1 - {}^2H$

Généralisation : spécialisation absolue, par exemple

$$(S - {}^qD(\mathbf{p}_s))/(S - 1)$$





# Profil de spécialisation

Mesures de biodiversité et de concentration spatiale par l'entropie

Eric Marcon

Motivation

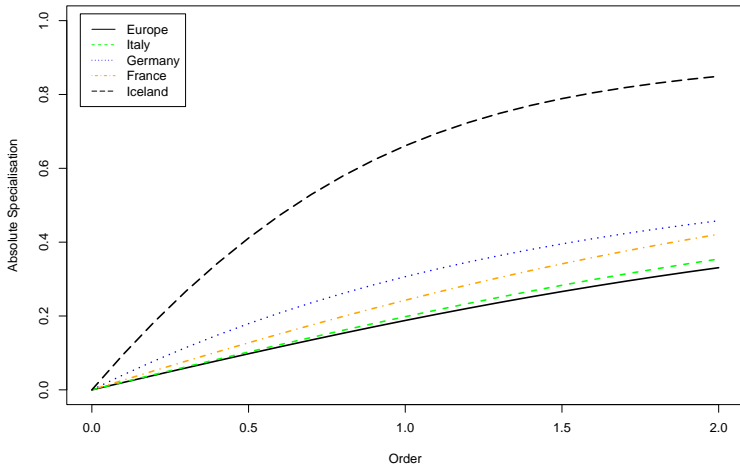
Entropie

Divergence

Diversité jointe

Conclusion

References





# Valence

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Diversité des pays occupés par un secteur.

En écologie : largeur de niche ([Levins, 1968](#)) = diversité des habitats occupés par une espèce.

Calculée à partir des probabilités qu'un individu du secteur  $s$  choisi se trouve dans le pays  $i$ :  $\mathbf{p}_{i|s}$

Les poids des secteurs / espèces sont arbitraires :  $\mathbf{w}_s$

Raisonnement identique à celui de la diversité,  $\mathbf{p}_{i|s}$  remplace  $\mathbf{p}_{s|i}$

La concentration spatiale est la notion opposée. On peut la définir comme la spécialisation :

$$(I - {}^qD(\mathbf{p}_i))/(I - 1)$$



# Profil de valence

Mesures de biodiversité et de concentration spatiale par l'entropie

Eric Marcon

Motivation

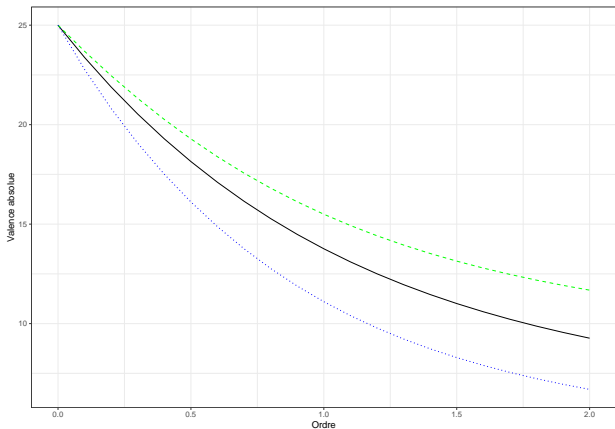
Entropie

Divergence

Diversité jointe

Conclusion

References



Profils de valence absolue de l'industrie (noir), du secteur C10 (vert) et du secteur C20 (Manufacture de produits chimiques : bleu)



**AMAP**

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

**Divergence**

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Divergence



## Historique 3

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Débat sur la décomposition additive ou multiplicative de la diversité : numéro spécial de *Ecology* ([Ellison, 2010](#))

Deux propositions:

- [Chao et al. \(2012\)](#) : définition ad-hoc de la diversité  $\alpha$
- [Marcon et al. \(2014\)](#) : présenté ici



# Décomposition de l'entropie

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

L'entropie de Tsallis de la métacommunauté est la somme de la moyenne des entropies des communautés et des divergences entre la métacommunauté et les communautés locales.

$${}^q_\gamma H(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i) = \sum_s p_s \ln_q(1/p_s)$$

$${}^q_\gamma H(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i) = {}^q_\alpha H(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i) + {}^q_\beta H(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i)$$



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

## Décomposition de l'entropie

L'entropie  $\alpha$  est la moyenne des entropies des communautés :

$${}^q H(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i) = \sum_i w_i \sum_s p_{s|i} \ln_q (1/p_{s|i})$$

L'entropie  $\beta$  est la moyenne des divergences ([Tsallis, 1998](#))  
entre les communautés et la métacommunauté :

$${}^q H(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i) = \sum_i w_i \sum_s p_{s|i} [\ln_q (1/p_s) - \ln_q (1/p_{s|i})]$$

- Entropie de l'Europe = Moyenne de (entropie absolue + entropie relative des pays).



# Décomposition de la diversité

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

La décomposition de la diversité est multiplicative.

$${}^q_\gamma D(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i) = {}^q_\alpha D(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i) \times {}^q_\beta D(\mathbf{p}_{s|i}, \mathbf{w}_i)$$

- Nombre effectif de secteurs de l'Europe = Nombre effectif de secteur par pays x nombre effectif de pays.

Attention : la diversité  $\beta$  n'est l'exponentielle de la divergence qu'à l'ordre 1 (Kullback-Leibler).





AMAP

# Diversité des secteurs industriels en Europe

Mesures de biodiversité et de concentration spatiale par l'entropie

Eric Marcon

Motivation

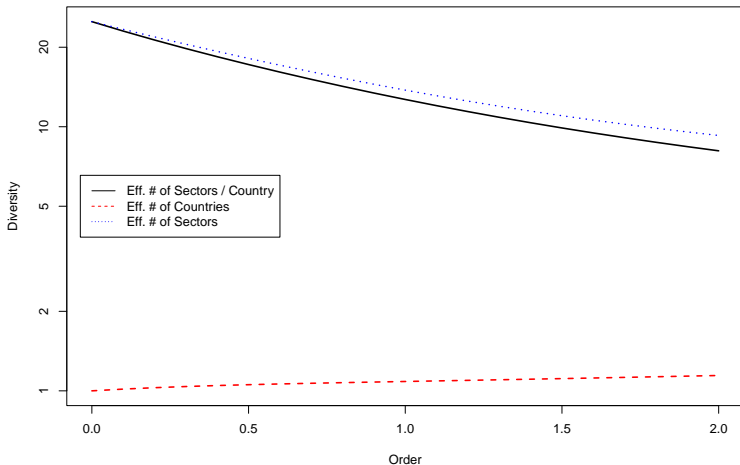
Entropie

Divergence

Diversité jointe

Conclusion

References





**AMAP**

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

# Diversité jointe



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

## Définitions

Diversité de toute la distribution des  $p_{s,i}$  : nombre d'employés par secteur et pays.

$${}^q H(\mathbf{p}_{s,i}) = \sum_{s,i} p_{s,i} \ln_q (1/p_{s,i})$$

$${}^q D(\mathbf{p}_{s,i}) = e_q^{{}^q H(\mathbf{p})}$$

Nombre effectif de secteurs x pays, sans interprétation utile.



# Décomposition

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Décomposition similaire de l'entropie et de la diversité, avec une composante supplémentaire : la redondance ([Gregorius, 2010](#)).

Diversité jointe = Nombre effectif de secteurs par pays  $\times$  nombre de pays effectifs  $\times$  *redondance des pays*.



# Diversité de l'industrie européenne

Mesures de biodiversité et de concentration spatiale par l'entropie

Eric Marcon

Motivation

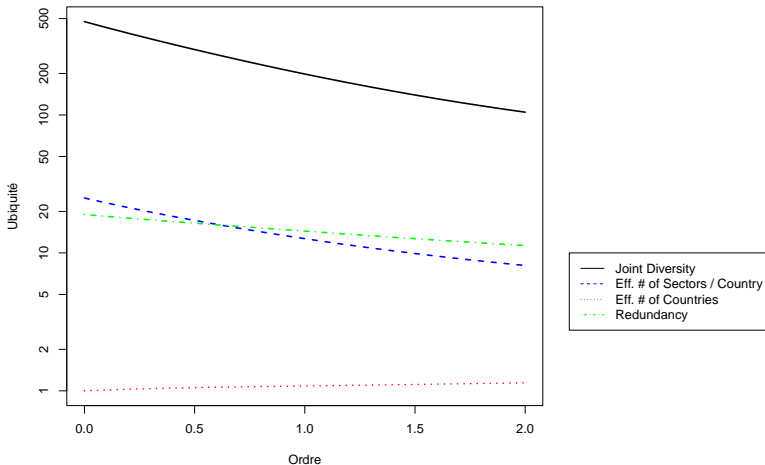
Entropie

Divergence

Diversité jointe

Conclusion

References





**AMAP**

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

**Conclusion**

References

**Conclusion**



**AMAP**

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

**Conclusion**

References

# Spécificités disciplinaires

Voir [Marcon \(2019\)](#).

Points de vue :

- Diversité ou spécialisation
- Valence ou concentration spatiale

Pratiques :

- Données exhaustives en économie
- Échantillons en écologie :
  - poids arbitraires
  - pas de diversité jointe, pas de concentration spatiale



# Estimation

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

En écologie, dans des systèmes très divers, les espèces rares ne sont pas échantillonnées.

Littérature abondante sur l'estimation de l'entropie à partir de données incomplètes. Revue : [Marcon \(2015\)](#).

Les données d'abondance sont indispensables, alors que les fréquences suffisaient dans toute la présentation.





# Littératures parallèles

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Entropie HCDT découverte trois fois : [Havrda and Charvát \(1967\)](#), [Daróczy \(1970\)](#), [Tsallis \(1988\)](#)

Entropie de Shannon redécouverte par [Theil \(1967\)](#)  
(concentration absolue)

Divergence de [Kullback and Leibler \(1951\)](#) redécouverte par  
[Theil \(1967\)](#) (concentration relative), [Mori et al. \(2005\)](#) et  
[Alonso-Villar and Del Río \(2013\)](#)



## Autres approches

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

- Pour les collectionneurs : entropie de Simpson généralisée ([Grabchak et al., 2017](#)) d'ordre  $r < n$ 
  - Fonction d'information :  $I(p_s) = (1 - p_s)^r$ .
  - Interprétation: probabilité que le  $(r + 1)^{\text{ème}}$  individu soit d'une nouvelle espèce.
  - Non décomposable.
- En redéfinissant la rareté : entropie de [Ricotta and Szeidl \(2006\)](#), diversité de [Leinster and Cobbold \(2012\)](#)
  - Rareté :  $1/\mathbf{Z}\mathbf{p}_s$  où  $\mathbf{Z}$  est une matrice de similarité entre espèces.



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Alonso-Villar, O. and C. Del Río (2013). Concentration of Economic Activity: An Analytical Framework. *Regional Studies* 47(5), 756–772.

Chao, A., C.-H. Chiu, and T. C. Hsieh (2012). Proposing a resolution to debates on diversity partitioning. *Ecology* 93(9), 2037–2051.

Daróczy, Z. (1970). Generalized information functions. *Information and Control* 16(1), 36–51.

Ellison, A. M. (2010). Partitioning diversity. *Ecology* 91(7), 1962–1963.

Grabchak, M., E. Marcon, G. Lang, and Z. Zhang (2017). The generalized Simpson's entropy is a measure of biodiversity. *Plos One* 12(3), e0173305.



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

- Gregorius, H.-R. (2010). Linking Diversity and Differentiation. *Diversity* 2(3), 370–394.
- Havrda, J. and F. Charvát (1967). Quantification method of classification processes. Concept of structural alpha-entropy. *Kybernetika* 3(1), 30–35.
- Hill, M. O. (1973). Diversity and Evenness: A Unifying Notation and Its Consequences. *Ecology* 54(2), 427–432.
- Hirschman, A. O. (1964). The Paternity of an Index. *The American Economic Review* 54(5), 761–762.
- Hurlbert, S. H. (1971). The Nonconcept of Species Diversity: A Critique and Alternative Parameters. *Ecology* 52(4), 577–586.
- Jost, L. (2006). Entropy and diversity. *Oikos* 113(2), 363–375.



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Kullback, S. and R. A. Leibler (1951). On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics* 22(1), 79–86.

Leinster, T. and C. Cobbold (2012). Measuring diversity: The importance of species similarity. *Ecology* 93(3), 477–489.

Levins, R. (1968). *Evolution in Changing Environments: Some Theoretical Explorations*. Princeton University Press.

Maasoumi, E. (1993). A compendium to information theory in economics and econometrics. *Econometric Reviews* 12(2), 137–181.

Marcon, E. (2015). Practical Estimation of Diversity from Abundance Data. *HAL 01212435*(version 2).



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

- Marcon, E. (2019). Mesure de la biodiversité et de la structuration spatiale de l'activité économique par l'entropie. *Revue économique* 70(3), 305–326.
- Marcon, E., I. Scotti, B. Hérault, V. Rossi, and G. Lang (2014). Generalization of the Partitioning of Shannon Diversity. *Plos One* 9(3), e90289.
- Mori, T., K. Nishikimi, and T. E. Smith (2005). A Divergence Statistic for Industrial Localization. *The Review of Economics and Statistics* 87(4), 635–651.
- Rényi, A. (1961). On Measures of Entropy and Information. In J. Neyman (Ed.), *4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Volume 1, Berkeley, USA, pp. 547–561. University of California Press.



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Ricotta, C. and L. Szeidl (2006). Towards a unifying approach to diversity measures: Bridging the gap between the Shannon entropy and Rao's quadratic index. *Theoretical Population Biology* 70(3), 237–243.

Theil, H. (1967). *Economics and Information Theory*. Chicago: Rand McNally & Company.

Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics* 52(1), 479–487.

Tsallis, C. (1994). What are the numbers that experiments provide? *Química Nova* 17(6), 468–471.

Tsallis, C. (1998). Generalized entropy-based criterion for consistent testing. *Physical Review E* 58(2), 1442–1445.



AMAP

Mesures de  
biodiversité et  
de  
concentration  
spatiale par  
l'entropie

Eric Marcon

Motivation

Entropie

Divergence

Diversité  
jointe

Conclusion

References

Whittaker, R. H. (1960). Vegetation of the Siskiyou Mountains, Oregon and California. *Ecological Monographs* 30(3), 279–338.

Wright, S. (1931). Evolution in Mendelian Populations. *Genetics* 16(2), 97–159.